

В.С. Годлевский, д-р техн. наук
(Ин-т проблем моделирования в энергетике
им. Г.Е. Пухова НАНУ, Киев)
В.В. Годлевский, д-р физики
(Ун – т Миннесоты, США)

БЛОЧНЫЙ ГИБРИДНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНЕЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведен итерационный метод решения систем конечных уравнений, который имеет расширенную область сходимости по сравнению с методом Ньютона-Рафсона-Канторовича (НРК) и квадратическую скорость сходимости в локальной области существования решений. На каждом шаге метода выполняются: автоматическое выделение «плохих» блоков уравнений, которые обуславливают отсутствие сходимости всей системы уравнений; нахождение начальных приближений для переменных «плохих» блоков уравнений с помощью модифицированного для многомерного случая метода дробления сетки; строгое решение «плохих» уравнений методом НРК относительно своих переменных; операции одного шага метода НРК для оставшихся «хороших» блоков уравнений исходной системы.

Ключевые слова: системы конечных и алгебраических уравнений, локальная сходимость, расширенная область сходимости, квадратическая скорость сходимости, метод дробления сетки и шага, начальные условия, ранжирование и нормирование уравнений.

В статье используется известный в разных вариациях подход Пухова Г.Е. [1], Крона Г. [2] и других авторов к анализу сложных цепей по частям для синтеза численного метода решения систем нелинейных конечных уравнений с целью обеспечения его глобальной сходимости.

К наиболее распространенным на практике методам решения систем нелинейных конечных уравнений

$$F(X) = 0 \quad (1)$$

(здесь $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $F(X) = [f_1(X), \dots, f_n(X)]^T$ относится итерационный метод Ньютона – Рафсона – Канторовича (НРК) [3], [4]. Это обусловлено тем, что метод НРК имеет квадратичную сходимость в окрестности решения (1), и достаточно простой численный алгоритм реализации. Алгоритм для метода НРК имеет вид

$$X_{k+1} = X_k + P_k, \quad (2)$$

где P_k – решение системы линейных алгебраических уравнений

$$J(X_k) P_k = - F(X_k), \quad (3)$$

здесь $J(X)$ – матрица Якоби векторной функции $F(X)$ при $X = X_k$

$$J(X_k) = \left[\frac{\partial F(X)}{\partial X} \right]_{/X=X_k}, \quad (4)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, j$. Значение j (то есть максимальное число итераций) обычно выбирается исходя из условия

$$\| F(X_j) \| = E < \mathbf{E} \quad \text{и} \quad j < t, \quad (5)$$

или

$$\| X_j - X_{j-1} \| < \mathbf{E}_1 \quad \text{и} \quad j < t,$$

где $\| \dots \|$ - одна из подчиненных норм, \mathbf{E} и \mathbf{E}_1 - малые величины; E - невязка; параметр $t \gg 1$ используется в качестве признака отсутствия сходимости процесса (2) - (5).

На практике встречаются случаи, когда численный процесс (2) - (5) не сходится к решению (1) - он «зацикливается» или, вообще, расходится. Отсутствие сходимости или даже расходимости процесса решения (1) методом (2), (3) может быть обусловлено следующими факторами:

- а) плохой обусловленностью матрицы $J(X)$ в точке X_k ;
- б) большой погрешностью определения элементов матрицы (4), что особенно часто имеет место при их вычислении путем численного дифференцирования;
- в) скачкообразным характером изменения элементов функции при изменении аргумента X , что наблюдается, например, при кусочно-линейной аппроксимации функций в (1);
- г) наличием так называемых «ловушек» для методов касательных, к классу которых относится метод НРК, («ловушки» представляют собой, например, области локальных минимумов функций (1); при попадании в эти области текущей точки X_k процесс (2) - (5) «зацикливается» [5], [6]);
- д) наличием «неблагоприятных» функций в левой части (1) для метода НРК, например функций типа $\text{arctg } X$, при которых может иметь место «расходимость» процесса (2) - (5) даже при достаточно хорошем начальном приближении X_0 к точному решению [7].

Тем не менее, метод НРК даже в виде (2) - (5) достаточно часто применяется на практике, когда, например, любое значение вектора X из области существования решения (1), заданное «физическими» или иными оценками является хорошим начальным приближением для (1).

Для расширения области локальной сходимости метода НРК разработано несколько известных способов.

Так, для обнаружения и нейтрализации влияния фактора «а» обычно можно применять процедуры вычислений невязок для (3) с двойной точностью и их масштабирования (на этапе прямых и обратных ходов решения систем линейных алгебраических уравнений и итерационных уточнений векторов решений [8]).

С целью уменьшения влияния факторов «б» - «д» на сходимость итерационного процесса (2) - (5) и расширения локальной области его сходимости при решении (1) формулу (2) модифицируют путем введения регулируемого параметра h - величины шага приращения:

$$X_{k+1} = X_k + h P_k, \quad (6)$$

где $h > 0$.

Известны работы, в которых предлагаются специальные процедуры выбора величины h . Наиболее простой процедурой выбора шага h является его дробление, при котором величина h остается в интервале $[\mathbf{E}_2, 1]$ [9], где \mathbf{E}_2 - малая величина. На каждом k - ом шаге величина параметра выбирается путем дробления с шагом 0.5 начального значения, равного 1, до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$E_k(h) < E_{k-1}(h).$$

В [10] предлагается оптимизационный алгоритм выбора h . Этот алгоритм предполагает обязательную вогнутость функции невязки $E(h)$, что не всегда имеет место (например, из-за влияния погрешностей вычислений элементов матрицы Якоби численным дифференцированием или при попадании текущей точки X_k в область локального минимума функции левой части какого-либо уравнения в (1)). В алгоритме [10] также ограничивается диапазон изменения шага h интервалом $[E^{-1}, 1]$, что не всегда является оправданным.

В [11] предлагается алгоритм выбора h , в котором сняты указанные выше ограничения алгоритма [10], то есть допускается выпуклость функции $E(h)$ и величина h выбирается на интервале (E^{-1}, b) , где $b > 1$.

Еще одним способом увеличения области сходимости метода НРК является применение нормирования уравнений в (1). В ряде случаев можно применять нормирование константами, которое заключается в умножении слева вектора $F(X)$ на диагональную матрицу с постоянными для всех итерационных шагов элементами, равными обратным максимальным значениям оценок модулей функций левых частей соответствующих уравнений. В [12] предложена адаптивная (переменная на каждом шаге) нормировка, которая состоит в делении каждого уравнения в (3) на третью подчиненную норму соответствующей строки матрицы Якоби $J(X_k)$.

Ни один из перечисленных алгоритмов и способов практически не гарантирует глобальную сходимость решения системы (1) методом НРК при наличии “ловушек” (фактор «г»). Поэтому часто рекомендуется, например в [13], метод НРК применять в сочетании с другим методом (имеющим худшие показатели локальной сходимости, но лучшие, чем метод НРК, показатели глобальной сходимости) для получения приемлемого начального приближения для НРК. Такой подход предполагает, что при поиске приемлемого для метода НРК начального приближения вся система (1) решается каким-либо другим методом. Наиболее надежным методом поиска начального приближения для НРК является метод сеток. Однако метод сеток приводит к чрезвычайно большой трудоемкости в случае больших размерностях системы (1).

Трудоемкость поиска хорошего начального приближения для метода НРК можно существенно снизить, если трудоемкий метод (например, метод сеток) применять не для решения всей системы (1), а для решения только отдельной (“плохой”) подсистемы уравнений небольшой размерности из (1), свойства функций левых частей которой являются причиной несходимости процесса (2) – (6). Такой подход оправдан тем, что на практике при решении методом НРК вероятность наличия возможных «ловушек», которые обусловлены сочетанием свойств многих уравнений в (1), обычно мала. Поэтому часто встречаются случаи, когда отсутствие сходимости метода НРК обусловлено только свойствами отдельной небольшой подсистемы уравнений в (1), которая описывает некоторый физический нелинейный узел или блок (вносящий в (1), например, немонотонные функциональные зависимости в (1) со многими экстремумами), или даже свойствами одного уравнения. Например, при расчетах режимов трубопроводных газотранспортных систем отсутствие сходимости метода НРК обычно бывает обусловлено влиянием одного или нескольких уравнений для отдельного цеха компрессорных станций. Аналогичная ситуация имеет место и при расчетах режимов электронных или электрических схем или систем.

В [14] тезисно изложен блочный гибридный метод (БГМ), который представляет собой определенное сочетание нескольких методов: метода НРК и, например, метода сеток. Однако, сочетание разных методов в БГМ проводится на уровне отдельных подсистем уравнений в (1), а не всей системы, как это предполагается в [13].

Рассмотрим далее БГМ, который характеризуется, с одной стороны, квадратичной сходимостью (в целом) решения (1) и возможностью применения различных численных методов

для решения отдельных подсистем уравнений в (1), с другой стороны. Квадратичная сходимость БГМ для системы в целом обеспечивается на этапе решения системы (1), для которого найдены хорошие начальные приближения переменным “плохих” подсистем уравнений, за счет того, что точное решение “плохих” и остальных подсистем уравнений осуществляется методом (2) – (6) с учетом всех зависимостей между этими подсистемами.

БГМ является дальнейшим развитием [15], [16], [17], [18] и заключается в следующем.

Если процесс (2) – (6) не сходится для (1), то выделяется «наихудшее» уравнение или несколько «плохих» уравнений. Это выделение осуществляется путем ранжирования значений невязок $|f_i(X_i)|$ ($i = 1, n$) для уравнений в (1). В подсистему “плохих” уравнений целесообразно вводить от одного до трех уравнений, имеющих наибольшие невязки. Размерность подсистемы «плохих» уравнений ограничивается на практике показателями трудоемкости применяемого для их решения метода. Введем обозначение для выделенной подсистемы “плохих” уравнений:

$$F_v(X) = 0. \quad (7)$$

Выделенное уравнение или группа уравнений решается отдельно от всех остальных методом, показатели глобальной сходимости которого значительно выше аналогичные показатели метода НРК. Для этого необходимо вначале выделить для подсистемы (7) из всего вектора X подвектор неизвестных Y , относительно которых и следует решать эту подсистему при зафиксированном начальном значении подвектора Z остальных переменных из X . При этом вектор X приводится к виду

$$X = (Y^T, Z^T)^T. \quad (8)$$

Естественно, размерность вектора Y должна совпадать с размерностью “плохой” подсистемы уравнения. Выделение вектора неизвестных Y для “плохой” подсистемы уравнений можно выполнить, например, следующим способом.

Предварительно “закрепляем” каждое уравнение $f_m(X)$ в (1) только за одним неизвестным x_w (в общем случае $m \neq w$), то есть предварительно проведем “паспортизацию” уравнений (m – ое уравнение будем именовать уравнением для x_w). Такую предварительную паспортизацию уравнений можно проводить, используя физические предпосылки: например, путем выделения в совокупности неизвестных, входящих в m – ое уравнение, определяющую переменную x_w , которая в функции левой части данного уравнения может изменяться в больших пределах. Паспортизацию уравнений можно также проводить не только относительно отдельной определяющей переменной, но и относительно отдельных подвекторов определяющих переменных, которыми, например, могут быть внутренние переменные отдельных физических блоков или узлов моделируемой физической системы.

Далее будем считать, что каждое уравнение в (1) пронормировано путем его умножения на оценку максимального значения модуля функции его левой части.

Предположим, что после попытки решения (1) методом (2) – (6) выявлено отсутствие сходимости, определена и сформирована подсистема «плохих» уравнений, которая вызывает эту несходимость. Представим (1) в виде двух подсистем уравнений, что можно выполнить путем перестановки (перенумерации) уравнений в (1):

$$F_0(Z, Y) = 0, \quad (9)$$

$$F_v(Z, Y) = 0, \quad (10)$$

где $Z = (x_1, \dots, x_{n_0})^T$; $Y = (x_{n_0+1}, \dots, x_n)^T$; $(Z^T, Y^T)^T = X$;
 $F_0(\dots) = [f_1(\dots), \dots, f_{n_0}(\dots)]^T$; $F_V(\dots) = [f_{n_0+1}(\dots), \dots, f_n(\dots)]^T$.

При этом будем считать (10) “плохой” подсистемой уравнений (т.е. подсистемой, обуславливающей плохую сходимость совместного решения (9), (10) путем непосредственного решения (1)).

Рассмотрим следующий алгоритм, который позволяет решать (1) путем раздельного решения подсистем (9) и (10) при квадратичной скорости сходимости решения (9), (10) целом.

Стадия 1. Для некоторого начального приближения Z_0 для вектора Z ($Z = Z_0$) путем решения “плохой” подсистемы (10)

$$F_V(Z_0, Y) = 0 \quad (11)$$

определяется значение Y_0 вектора Y , соответствующее начальному значению Z_0 вектора Z .

Решение (11) целесообразно проводить в два этапа. На первом этапе система (11) решается приближенно некоторым грубым методом. В качестве такого метода можно использовать, например, обобщение метода дробления сетки для многомерного случая, которое заключается в следующем.

Вначале задается “начальный” шаг сетки l_{i0} для каждой переменной вектора Y :

$$l_{i0} = (y_i \max 0 - y_i \min 0) / g_i, \quad (12)$$

где $i = n_0+1, \dots, n$; $g_i \geq 2$ – константа, которая выбирается с учетом показателей надежности и трудоемкости решения (10) методом сеток.

Вычисляются координаты узлов сетки для вектора Y , которые для каждой переменной находятся в интервале

$$L_{i0} = [y_i \max 0, y_i \min 0], \quad (13)$$

где $y_i \max 0$ и $y_i \min 0$ – максимальное и минимальное значения переменной y_i , задаваемые на «нулевом» шаге физическими или иными оценками.

Во всех узлах сетки вычисляются невязки уравнений и для каждого уравнения находятся пары таких узлов сетки, для которых:

$$|f_i(Y_{i1}) f_i(Y_{i2})| = \min \quad (15)$$

и

$$f_i(Y_{i1}) f_i(Y_{i2}) < 0, \quad (14)$$

где операция поиска минимума модуля произведения невязок i – го уравнения проводится по всем узлам сетки; $i = n_0+1, \dots, n$.

Определяется центр тяжести найденных векторов Y_{i1} и Y_{i2} :

$$Y_{i0} = (Y_{i1} + Y_{i2}) / 2. \quad (16)$$

Если неравенство (15) не выполняется ни для одной пары узлов сетки, то в качестве вектора (16) принимается координата узла сетки, в котором значение функции $|f_i(Y)|$ является минимальным по всем узлам сетки.

После нахождения векторов Y_{i0} для каждого уравнения в (11) определяется центр тяжести Y_t всех векторов Y_{i0} ($i = n_0+1, \dots, n$). Вектор Y_t принимается в качестве начального приближения для решения (10) методом (2) – (6). Если процесс решения этим методом не сошелся, то

происходит переход к следующему итерационному шагу метода сеток, который аналогичен предыдущему за исключением формул для определения координат начала и конца интервала поиска решения по каждой переменной вектора Y . Эти координаты для интервала переменной Y_i выбираются с помощью значений элементов векторов, фигурирующих в (14), (15):

$$Y_i \max 1 = \max_i Y_{i1}, \quad (17)$$

$$Y_i \min 1 = \min_i Y_{i2}, \quad (18)$$

где $i = n_{0+1}, \dots, n$; Y_{i1} и Y_{i2} – i -ые элементы векторов, найденных из (14) и (15).

Пусть процесс решения (11) методом (2) – (6) после очередного шага обобщенного метода дробления сетки сошелся.

Стадия 2. После решения (11) делается один шаг решения (9) методом НРК при найденном $Y = Y_0$:

$$Z_1 = Z_0 - \left[\frac{dF_0(Z, Y)}{dZ} \right]_{/Z_0, Y_0}^{-1} F_0(X_0, Y_0), \quad (19)$$

(то есть определяется вектор Z_k , $k = 1$, на последующих шагах $k = 2, 3, \dots$).

В (19) матрица $\frac{dF_0(Z, Y)}{dZ}$ задается формулой:

$$\frac{dF_0(Z, Y)}{dZ} = \frac{\partial F_0(Z, Y)}{\partial Z} + \frac{\partial F_0(Z, Y)}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial Z}. \quad (20)$$

Здесь, в свою очередь, матрица $\frac{\partial Y}{\partial Z}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial Y}{\partial Z} = - \left[\frac{\partial F_v(Z, Y)}{\partial Y} \right]^{-1} \frac{\partial F_v(Z, Y)}{\partial Z}, \quad (21)$$

Подставив (21) в (20), получим:

$$\frac{dF_0(Z, Y)}{dZ} = \frac{\partial F_0(Z, Y)}{\partial Z} - \frac{\partial F_0(Z, Y)}{\partial Y} \left[\frac{\partial F_v(Z, Y)}{\partial Y} \right]^{-1} \frac{\partial F_v(Z, Y)}{\partial Z}. \quad (22)$$

Вычисленное с помощью (19) значение Z_1 подставляется в “плохую” подсистему (11) вместо Z_0 , которая решается относительно Y_1 . Найденное значение Y_1 подставляется в (19) для определения Z_2 и так далее. При этом процесс решения (11) методом НРК при найденных приемлемых начальных условиях для определения Y_k , обеспечивающих сходимость метода НРК, можно описать выражением:

$$Y_{k, \tilde{n}+1} = Y_{k, \tilde{n}} - h \left[\frac{\partial F_V(Z, Y)}{\partial Y} \right]_{/Y_{k, \tilde{n}}, Z_k}^{-1} F(Z_k, Y_{k, \tilde{n}+1}). \quad (23)$$

где $j = 0, 1, \dots, q$; q – номер предпоследнего шага; причем после того, как процесс (23) решения (11) сошелся, принимается

$$Y_k = Y_{k, q+1} \quad (24)$$

Соответственно, формула (19) для произвольного номера итерационного шага имеет вид

$$Z_{k+1} = Z_k - h \left[\frac{dF_0(Z, Y)}{dZ} \right]_{/Z_k, Y_k}^{-1} F_0(Z_k, Y_k), \quad (25)$$

где k является общим индексом для (23) – (25), то есть обозначает единый номер итерационного шага.

Итерационный процесс (23) – (25) повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости процесса, например, условие:

$$\| Z_{k+1} - Z_k \| + \| Y_{k+1} - Y_k \| < \mathbf{E},$$

где $\| \dots \|$ – одна из трех подчиненных норм

Подчеркнем, что отличительной чертой изложенного БГМ является то, что на каждом его шаге после полного решения (11) обобщенным методом дробления сетки и методом НРК делается только один шаг решения (9) при $Y = Y_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$F_0(Z, Y_k) = 0. \quad (26)$$

Докажем, что предложенный БГМ для решения системы (9), (10) имеет квадратичную скорость сходимости. Для этого воспользуемся представлением Y в (10) в виде неявной функции от Z

$$Y = f(Z). \quad (27)$$

Подставим (27) в (9)

$$F_0[Z, f(Z)] = 0. \quad (28)$$

Далее запишем метод НРК для (28) в виде

$$Z_{k+1} = Z_k - h \left[\frac{dF_0[Z, f(Z)]}{dZ} \right]_{/Z_k}^{-1} F_0[Z_k, f(Z_k)], \quad (29)$$

где матрицу $\frac{dF_0[Z, f(Z)]}{dZ}$ путем дифференцирования $F_0[Z, f(Z)]$ по Z как слож-

ную функцию можно привести к виду

$$\frac{dF_0[Z, f(Z)]}{dZ} = \frac{\partial F_0(Z, f(Z))}{\partial Z} + \frac{\partial F_0(Z, f(Z))}{\partial f(Z)} \frac{\partial f(Z, f(Z))}{\partial Z}. \quad (30)$$

Для матрицы производных неявной векторной функции (27) по \mathbf{Z} используем выражение

$$\frac{\partial f(Z)}{\partial Z} = - \left[\frac{\partial F_V(Z, Y)}{\partial Y} \right]^{-1} \frac{\partial F_V(Z, Y)}{\partial Z}, \quad (31)$$

которое можно получить путем дифференцирования (10) по \mathbf{Z} и решения полученной при этом системы

$$\frac{\partial F_V(Z, Y)}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial Z} + \frac{\partial F_V(Z, Y)}{\partial Z} = 0$$

при учете, что $\frac{\partial Y}{\partial Z} = \frac{\partial f(Z)}{\partial Z}$. После подстановки (31) в (30) имеем (22).

Таким образом, формула (29) метода НРК и формула (25) для БГМ совпадают. При этом формулы (23) - (25) представляют собой не что иное, как своеобразный алгоритм метода НРК решения системы (28), где неявная функция (27) вычисляется численно путем решения (11). Следовательно, при условии окончательного решения (11) методом НРК, формулы (23) - (25) представляют собой метод, имеющий также квадратичную скорость сходимости, что и требовалось доказать.

Расчет технических систем в стационарных режимах обычно сводится не только к решению системы уравнений вида (1) или (9), (10), но и к оптимизации режимов, к определению вероятностных (например, точностных) и других характеристик. При этом часто возникает необходимость вычисления функций чувствительности или частных производных вектора решений в (1) по независимым варьируемым параметрам, с учетом которых (1) запишем в виде

$$F(X, Q) = 0, \quad (32)$$

где Q - вектор независимых параметров q_s ($s = 1, r$).

Рассмотрим задачу расчета матриц частных производных $\frac{\partial Z}{\partial Q}$ и $\frac{\partial Y}{\partial Q}$ при условии, что для решения (1) применяется метод (24) - (26).

В [16] приведен один из способов расчета этих матриц, при конструировании которого минимизировался объем машинной памяти. Однако, этот показатель для современных компьютеров не является критичным, поэтому здесь приведем второй способ, алгоритм которого является более простым. Этот способ заключается в следующем.

Продифференцируем (32) по Q :

$$\frac{\partial F(X, Q)}{\partial Q} + \frac{\partial F(X, Q)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial Q} = 0. \quad (33)$$

Из (33) следует, что

$$\frac{\partial X}{\partial Q} = - \left[\frac{\partial F(X, Q)}{\partial X} \right]^{-1} \frac{\partial F(X, Q)}{\partial Q}. \quad (34)$$

Система линейных алгебраических уравнений (33) или зависимость (34) дают возможность вычислить матрицу искомых производных, используя найденные приведенным выше методом решения систем (9), (10). Для этого следует сформировать вектор $X = (Z^T, Y^T)^T$, вычислить, например, путем численного дифференцирования элементы фигурируемых в (34) матриц и решить матричную систему линейных алгебраических уравнений.

Заметим, что в систему (11) целесообразно включать несколько независимых между собой блоков уравнений, из-за которых не сходится процесс решения всей системы (1) методом НРК. Под независимыми блоками уравнений здесь понимаем такие блоки, переменные которых фигурируют только в одном из них. На практике такие случаи встречаются достаточно часто. Примерами являются сетевые трубопроводные газотранспортные и электроэнергетические системы (ГТС) и (ЭС). Характерной особенностью этих систем является обязательное наличие в них транспортирующих магистральных технологических объектов (ТМТО) - линейных участков (трубопроводов) в ГТС и линий электропередач в ЭС. Благодаря наличию этих ТМТО ряд типовых технологических объектов в ГТС и ЭС в преобладающем большинстве случаев не имеют непосредственных связей между собой. К таким объектам относятся в ГТС компрессорные станции (КС) и генерирующие источники - в ЭС. Данное обстоятельство обуславливает отсутствие непосредственной зависимости между собой блоков уравнений КС для ГТС или генерирующих источников для ЭС. То есть определяющие переменные блока уравнений каждой КС в ГТС или каждого генерирующего источника в ЭС не входят в уравнения других КС или источников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухов Г.Е. Теория метода подсхем. // *Электричество* - 1952, N 8. - с. 65-73.
2. Крон Г. Исследование сложных систем по частям - диакоптика.-М.: Наука, 1972.-542.
3. Канторович Л.В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977. – 880 с.
4. Ортега Дж., Рейнболт В. Итерационные методы решения систем уравнений со многими неизвестными. - М., "Мир", 1975. – 558с.
5. Бахвалов Н., Жидков Н., Кобельков Г. Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 624 с.
6. Чуа Л.О., Лин Пен-Мин. Машинный анализ электронных схем: алгоритмы и вычислительные методы. М.: Энергия, 1980. – 640 с.
7. Вербжицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения). М.: Высшая школа, 2000. – 266 с.
8. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.- Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002. – 848 с.
9. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. М: Радио и связь, 1988. – 559 с.

10. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: "Мир", 1988, - 440 с.
11. Годлевский В.С. Способ выбора длины шага для метода Ньютона при моделировании существенно нелинейных систем. // Электронное моделирование. – 1995. – 17, №4. – с. 32 – 36.
12. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Московского физико-технического института, 1994. – 526 с.
13. Гловацкая А.П. Методы и алгоритмы вычислительной математики. М.: Радио и связь, 199. – 408 с.
14. Годлевский В.С., Годлевский В.В. Блочный метод решения систем нелинейных уравнений для моделирования режимов сетевых газотранспортных систем. // Тезисы докладов 1-ой Международной научно-технической конференции Диском 2002. – М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2002. – 82 с.
15. Гурарий М.М., Русаков С.Г. Машинный расчет сложных электронных схем методом подсхем.-Изв.АН СССР Техническая кибернетика, 1977, N1, с.193-197.
16. Годлевский В.С. Анализ погрешностей расчета установившихся режимов нелинейных схем.- Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1977, N 6, с. 61-69.
17. Годлевский В.С. Один вариант метода подсхем расчета характеристик электронных схем. // Электронное моделирование. - 1981. - 2, N1. - с.74-77.
18. Годлевский В.С. Блочный метод решения систем нелинейных систем конечных уравнений. // Электронное моделирование. – 1995. –17, №3. – с. 3 – 6.

Сведения об авторах.

ГОДЛЕВСКИЙ Виталий Станиславович, д-р техн. наук, зав. отделом Ин-та проблем моделирования в энергетике НАН Украины. В 1966 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область исследований: моделирование, оптимизация режимов и диагностика технических систем.

ГОДЛЕВСКИЙ Виталий Витальевич, доктор физики, научный консультант Ун-та Миннесоты США. В 2002 г. окончил Московский физико-технический ин-ут. Область научных исследований: математическое и компьютерное моделирование физических процессов.